MAI 1 - 5. cvičení

I. Opakování vlastností elementárních funkcí:
(příklady k opakování - z 1.cvičení)

1. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu) :

a) $f(x)=|x|$ a pak zkuste také grafy funkcí $|x-1|$; $|x-1|-|5-x|$; $||x-1|-1|$; $||x-1|-1|^2$; $||x-1|^2-1|$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{|x|}+1$; $\dfrac{1}{|x+1|}$; $\dfrac{x+1}{x-2}$; $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2-1}$;

e) $f(x)=e^x$ $(=\exp x)$ a pak zkuste také grafy funkcí $\exp(-x)$; $\exp(x-2)$; $\exp|x|$; $\exp(-|x|)$; $\exp(x^2)$; $\exp(-x^2)$; $\exp(\frac{1}{x})$;

g) $f(x)=\ln x$ a pak zkuste také grafy funkcí $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln x|$; $|\ln|x||$; $\ln(x+1)$; $\ln\dfrac{1}{x}$; $\ln\dfrac{1}{|x|}$; $\ln(x^2)$; $\ln\dfrac{x+1}{x-2}$;

h) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\cos x$ a zkuste také grafy funkcí $\sin(\frac{x}{2})$; $\cos(2x)$; $\cos(x+\pi)$; $|\sin x|$; $\sin|x|$; $\cos|x|$; $\sqrt{1-(\sin x)^2}$.

2. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$.

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$; $f(x)=\ln(x^2-1)$; $f(x)=\ln(\ln x)$; $f(x)=\ln(\ln x-1)$; $f(x)=\ln(\ln(x-1))$;

c) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; $f(x)=\sqrt{1-(\sin x)^2}$; $f(x)=\sqrt{(\sin x)^2-1}$; $f(x)=\ln(\sin x)$; $f(x)=\ln(\sin x-\frac{1}{2})$;

3. Vlastnosti funkce:

a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině $M\subseteq R$;
(iii) funkce prostá na $M\subseteq R$;
(iv) funkce inverzní k funkci f na $M\subseteq R$.

b) Dokažte (bez užití derivace), že funkce $f(x)=x^2$ je rostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0]$.

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:

$$f(x)=x^2+2x+2\,;\quad g(x)=\frac{1}{x^2+1}\,;\quad h(x)=\exp(-x^2)\,;\ \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ;\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

A pokuste se to dokázat za předpokladu, že „víme“, že funkce e^x je rostoucí funkce v R.

A dva „problémky“ pro zájemce:

d) Ukažte, že je-li funkce f lichá a $0\in Df$, pak je $f(0)=0$.

e) Promyslete, zda lze z monotonie dvou (i více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je složená funkce definována). Pokuste se výsledek co nejpřesněji formulovat a třeba i dokázat.

4. Inverzní funkce:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):
Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a,b), pak je funkce f na intervalu (a,b) prostá, a tedy existuje k funkci f na intervalu (a,b) funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci

i) $f(x)=x^2$ na intervalu $(-\infty,0]$;

ii) $f(x)=x^2+2x+2$ na maximálních možných intervalech;

iii) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ na maximálních možných intervalech;

iv) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ a $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ na maximálních možných intervalech.

c) Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

i) $f(x)=\sin x$ na intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ (fce $\arcsin x$);

ii) $f(x)=tg\,x$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (fce $arctg\,x$).

II. Limita funkce – úvod.

1. Z definice limity ukažte:

a) $\lim\limits_{x\to2}(3x-2)=4$; b) $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=0$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

2. Ukažte, že platí:

(i) $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}f(x)=0$

(ii) Je-li $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ a funkce $g(x)$ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu c, pak i $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)=0$.

3*. Nechť funkce f je neklesající a omezená v intervalu (a,b). Dokažte, že pak pro libovolné $c\in(a,b)$ existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to c+}f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c-}f(x)$; co lze říci o oboustranné limitě $\lim\limits_{x\to c}f(x)$?